ISABEL FRADERA

Existencia de soluciones estables en economías con bienes públicos locales*

1. Introduccion

En los modelos con bienes públicos locales los consumidores pueden desplazarse a nuevas unidades de consumo público en busca de combinaciones de bienes públicos y participación en los costes más ventajosas. Este supuesto de movilidad entre jurisdicciones dificulta el establecimiento de condiciones generales que garanticen la existencia de soluciones. En este trabajo se investiga la existencia de soluciones de tipo cooperativo para economías con bienes públicos locales en las que la única elección para los consumidores es en qué centro integrarse, y donde la variable central es la distribución de los consumidores en jurisdicciones.

El concepto de solución cooperativa o núcleo de una economía se basa en el criterio de que una asignación es rechazada por un grupo de consumidores, y no es, por tanto, una solución, si el grupo puede, con sus propios medios, conseguir niveles de utilidad superiores para todos sus miembros a los que les proporciona la asignación. En el terreno de los bienes públicos puros, está demostrado que, bajo condiciones generales, el núcleo existe y contiene el equilibrio de Lindahl[1]. Los bienes públicos locales se diferencian de los bienes públicos puros en la posibi-

* Este trabajo ha sido financiado por el Instituto de Estudios Fiscales a través de un contrato de investigación.

1. Este resultado ha sido probado por Foley.

lidad de excluir a parte de los consumidores de su consumo. Otra característica de los bienes públicos locales es que el número de individuos que consumen un bien público es revelante y afecta sus costes de producción. En este contexto, la formación de jurisdicciones con más de un consumidor se explica por los costes medios decrecientes con respecto al número de consumidores de un bien público. Como muestran los ejemplos presentados por Ellickson (1), esta falta de convexidad productiva puede resultar en la no existencia de solución cooperativa. En estos ejemplos toda asignación factible de bienes públicos y privados a los consumidores es rechazada por un grupo de consumidores para los que resulta más ventajoso formar una nueva jurisdicción y producir bien público con sus recursos propios totales.

En un artículo más reciente, Ellickson (2) formaliza la idea, presente en toda la literatura de los bienes públicos locales, de que la movilidad entre jurisdicciones permite hablar de mercados para bienes públicos, considerando a los bienes públicos locales como un tipo especial de bienes indivisibles. De esta manera demuestra la existencia de asignaciones que son buenas aproximaciones a equilibrios competitivos cuando el número de consumidores es lo suficientemente elevado como para que en cada jurisdicción se hayan agotado las economías de escala y se esté produciendo a costes medios constantes.

El presente trabajo adopta el tratamiento de los bienes públicos locales como bienes indivisibles y se plantea la cuestión de la existencia de equilibrios cooperativos cuando las economías a escala son significativas. El modelo es como sigue. Existe un bien público que puede ser producido en una gama finita de variedades. Los consumidores se agrupan en jurisdicciones o unidades de consumo público caracterizadas por la variedad de bien público que producen y por la manera en que distribuyen los costes entre sus miembros. El concepto de solución que se utiliza es muy cercano al de núcleo: una solución es estable si no puede ser mejorada por ningún consumidor individual ni por ninguna posible jurisdicción de consumidores. En este contexto se observa que con tres posibles variedades de bien público la existencia de soluciones factibles y estables no está garantizada. El resultado central del trabajo es el establecimiento de la existencia de soluciones factibles y estables bajo las condiciones generales del modelo si el número de variedades de bien público es de dos y sus costes de producción no dependen del número de consumidores a los que se suministra.

El trabajo está organizado de la siguiente forma. En la sección 2 se presenta el modelo. En la sección 3 se ofrecen ejemplos de existencia y de no existencia de soluciones estables con tres variedades. La sección 4 contiene el teorema de existencia con dos variedades y su demostración.

2. El modelo

Existen dos bienes, uno público y otro privado. El bien público se presenta en un número finito de variedades o especificaciones que sólo pueden ser consumidas en unidades enteras. Además, un consumidor no puede consumir más de una unidad de una variedad. El bien privado es homogéneo y puede ser consumido en cualquier cantidad no negativa. Así, el consumidor elige simultáneamente una cantidad de bien privado y una variedad de bien público o el no consumo de bien público.

Es posible interpretar las variedades de bien público como representando distintas cantidades de un bien público de calidad homogénea, como en el enfoque más tradicional. La consideración de un número finito de variedades equivaldría en esta interpretación a limitar la elección a un conjunto discreto de cantidades, y no al continuo representado por todos los números reales no negativos.

El conjunto de variedades del bien público es $L = \{1, ..., l\}$. El conjunto de consumidores es $M = \{1, ..., m\}$. Sea $E = \{e^0, e^1, ..., e^l\} \subseteq R^m$, donde $e^j_k = 0$ si $k \neq j$, $e^j_j = 1$ si $j \neq 0$, $e^0 = 0 \in R^l$. El consumo típico de un consumidor se representa por (x,z) donde $x \in R_+$ y $z \in E$; x es la cantidad de bien privado consumido y z significa el consumo de una unidad de la variedad j de bien público si $z = e^j$, $j \neq 0$, o el no consumo de bien público si $z = e^0$.

Se supone que las preferencias del consumidor i pueden ser descritas por una función de utilidad del tipo

$$u_i(x, z) = x + b^i z$$

donde $b^i \in R^l_+$

Por consiguiente, se requiere que las preferencias sean estrictamente crecientes con respecto al bien privado y no decrecientes con respecto a cada variedad de bien público. Sin embargo, no se impone ninguna condición que las uniformice con respecto a las distintas variedades de bien público.

Las variedades de bien público son el producto de actividades productivas que utlizan el bien privado como único input. No existe producción conjunta de distintas variedades. Se supone que la tecnología es única y está a libre disposición de cualquier grupo de consumidores. Se describe por medio de funciones de costes, una para cada variedad de bien público. Se consideran funciones de costes del tipo

$$C_j(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \bar{c}_j\, \bar{n}_j & \text{si } n \leqslant \bar{n}_j \\ \bar{c}_j\, n & \text{si } n > \bar{n}_j \end{cases}$$

donde $\bar{c}_j > 0, \quad \bar{n}_j > 1, \quad j \in L.$

El valor de la función de costes de la variedad j en el punto n indica la cantidad mínima de bien privado necesaria para suministrar una unidad de variedad j a n consumidores. Las funciones de costes tienen una zona inicial de costes medios decrecientes para dar pie a la producción y el consumo colectivo de las variedades de bien público. A partir de $\bar{n}_j$, estrictamente mayor que 1, los costes de producción varían con el número de consumidores a los que se suministra la variedad. Se permite así, tanto la consideración de efectos de aglomeración, como, fijando la $\bar{n}_j$ suficientemente alta, la de costes independientes del número de individuos a los que se suministra el bien público.

El bien privado no puede ser producido; aparece en la economía en forma de recurso inicial distribuído entre los consumidores. La cantidad de bien privado que posee inicialmente el consumidor i se representa por $w(i)$.

Las combinaciones de mercancía homogénea y variedades de bien público que están al alcance de un grupo de consumidores dependen de sus recursos iniciales totales de mercancía homogénea y de la tecnología que permite la obtención del bien público. En particular, la producción de una variedad de bien público por un grupo de consumidores y su suministro a todos los miembros del grupo es posible si sus recursos totales de mercancía homogénea son suficientes para costear la producción de la variedad. En este caso, la asignación de mercancías a los individuos del grupo se reduce a la distribución entre los mismos de los costes de producción de la variedad o, en otras palabras, a la fijación del precio, posiblemente individualizado, o impuesto que cada individuo debe pagar para participar en el consumo colectivo del grupo.

La noción de estabilidad o aceptabilidad social que aquí se investiga se basa en la no obligatoriedad por parte de los consumidores de participar en un determinado consumo colectivo y la libertad de agrupación en centros de consumo colectivo autosuficiente. Una asignación no será aceptada por un grupo de consumidores si éstos pueden conseguir niveles de utilidad más elevados para cada uno de ellos con su organización en una jurisdicción o centro de consumo colectivo autosuficiente. Tampoco será aceptada por un individuo si le proporciona un nivel de utilidad inferior al que puede obtener por sus propios medios.

A continuación se formalizan estos conceptos

1) *Una asignación* es un par (x, z) donde x es una función de M a R_+ y z es una función de M a E.

2) *Una asignación,* (x, z), *es factible* si

$$\sum_{i \in M} x(i) \leqslant \sum_{i \in M} w(i) - \sum_{j \in L} C_j\Big(\sum_{i \in M} z_j(i) \Big).$$

3) *Una asignación,* (x, z), *es estable con respecto a la formación de jurisdicciones* si no existe un conjunto de consumidores $I \leqslant M$, una asignación $(\tilde{x}, \tilde{z})$, y una variedad de bien público $j \in L$ tales que

$$\text{(i)} \quad \tilde{z}(i) = e^j \qquad i \in I$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{i \in I} \tilde{x}(i) \leqslant \sum_{i \in I} w(i) - C_j\Big(\sum_{i \in I} \tilde{z}(i) \Big)$$

$$\text{(iii)} \quad u_i(\tilde{x}(i), \tilde{z}(i)) > u_i(x(i), z(i)), \qquad i \in I$$

3) *Una asignación,* (x, z), *es estable con respecto a la participación individual en el consumo colectivo* si

$$u_i(x(i), z(i)) \geqslant w(i), \quad i \in M.$$

Debido a la aditividad de las preferencias, las propiedades de los niveles de utilidad que corresponden a los tipos de asignaciones definidos anteriormente pueden ser descritas por restricciones lineales. Para simplificar la presentación se introducen las definiciones siguientes.

4) *Un vector de utilidad es* un vector $v = (v_1, \ldots, v_m) \in R^m$.

5) *Un vector de utilidad* v *es factible/estable con respecto a la formación de jurisdicciones/estable con respecto a la participación individual en el consumo colectivo* si existe una asignación (x, z) tal que

$$\text{(i)} \quad v_i = u_i(x(i), z(i)), \quad i \in M.$$

(ii) (x, z) es factible/estable con respecto a la formación de jurisdicciones/estable con respecto a la participación individual en el consumo colectivo.

3. Algunos ejemplos

El concepto de asignación factible y estable presentado en la sección anterior permite el tratamiento de soluciones, que se podrían considerar típicas del problema de los bienes públicos locales, en las que el consumo colectivo tiene lugar a nivel de jurisdicciones integradas por varios pero no todos los individuos de la economía. En esta sección el ejemplo 1 ofrece un caso sencillo en el que las soluciones estables se obtienen de la agrupación para el consumo colectivo de sólo dos de los tres consumidores de la economía. Al mismo tiempo, esta superioridad de las jurisdicciones parciales puede dar lugar a la inconsistencia del modelo, en el sentido de que no existan asignaciones factibles que sean al mismo tiempo estables con respecto a la formación de estas jurisdicciones. Esta posibilidad se ilustra en el ejemplo 2 con una economía de tres consumidores y tres variedades de bien público en la que cualquier asignación factible es inestable con respecto a alguna de las jurisdicciones formadas por dos consumidores.

El paso siguiente es la búsqueda de condiciones adicionales sobre los datos del modelo que garanticen la consistencia del mismo sin eliminar la ocurrencia de jurisdicciones parciales. Como indica el ejemplo 3, aún con los costes de producir el bien público independientes del tamaño de la jurisdicción la existencia de soluciones no está garantizada. La comparación del ejemplo 1 con el 2, y del ejemplo 3 con el 4 sugiere que en los casos sencillos que se están considerando la falta de consistencia del modelo es atribuible, por lo menos en parte, a ciertas características de los consumidores. En los ejemplos 2 y 3, sin soluciones estables, para cualquier variedad de bien público existe una segunda variedad que es preferida por una mayoría de consumidores a la primera. Alterando las preferencias de los consumidores de forma que esto no suceda se obtienen los ejemplos 1 y 4, respectivamente, en los que sí existen soluciones estables.

Ejemplo 1:

Sea $\mathbf{M} = \{1, 2, 3\}$, $L = \{1, 2, 3\}$, $b^1 = (3, 2, 1)$, $b^i = (2, 1, 3)$, $i = 2, 3$, $w(i) = 4, i \in \mathbf{M}$, y

$$C_j(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 14/3 & \text{si } n = 1, 2 \\ (7/3)n & \text{si } n > 2, \quad j \in L. \end{cases}$$

Considérese la asignación (x, z) donde $z(1) = e^0$, $z(2) = z(3) = e^3$, $x(1) = 4$, $x(2) = x(3) = 5/3$. La asignación (x, z) resulta de la producción de la variedad 3, suministrándola a los consumidores 2 y 3, y repartiendo los costes entre los mismos. La asignación excluye del consumo colectivo al consumidor 1, cuya relación de substitución entre el bien privado y la variedad 3 de bien público es menor que el incremento de costes que resultaría de su inclusión. Claramente, la asignación (x, z) es *factible y estable con respecto a la participación individual.* Los costes de producción de cualquier variedad son superiores a los recursos iniciales de un consumidor aislado. La suma de niveles de utilidad alcanzables por la jurisdicción formada por todos los consumidores es, para cualquier variedad producida, inferior a la suma de los que corresponden a (x, z), 40/3. La suma de los niveles de utilidad alcanzables por los miembros de la jurisdicción integrada por los consumidores 1 y 2, o por los consumidores 1 y 3, es inferior, para cualquier variedad, a la suma de los correspondientes a (x, z), 26/3. Por lo tanto, la asignación (x, z) es estable con respecto a la formación de jurisdicciones. En resumen, la asignación (x, z) es factible y estable.

Ejemplo 2:

Sea $M = \{1, 2, 3\}$, $L = \{1, 2, 3\}$, $b^1 = (3, 2, 1)$, $b^2 = (1, 3, 2)$, $b^3 = (2, 1, 3)$, $w(i) = 4$, $i \in M$, y

$$C_j(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 14/3 & \text{si } n = 1, 2 \\ (7/3) & \text{si } n > 2. \end{cases}$$

Como se verá a continuación, no existe para esta economía una asignación factible y estable.

Considérese el conjunto de vectores de utilidad factibles. Sea (x, z) una asignación tal que $z(1) = z(3) = e^1$, $z(2) = e^0$, $\sum_{i \in M} x(i) = \sum_{i \in M} w(i) - C_1(2) = 22/3$. La asignación (x, z) resulta de producir la variedad 1 y suministrarla a los consumidores 1 y 3; (x, z) es factible y da lugar a un vector de utilidad v tal que $v_1 + v_2 + v_3 = 37/3$. Otras formas de suministro de una única variedad, la producción de 2 variedades o el no producir ninguna variedad generan vectores de utilidad tales que la suma de sus componentes es inferior a 37/3. Los recursos totales de bien privado son insuficientes para la producción de tres variedades. Por consiguiente, cualquier vector de utilidad factible, v, satisface

$$v_1 + v_2 + v_3 \leqslant 37/3 \tag{1}$$

Estudiaremos ahora las condiciones que debe cumplir un vector de utilidad para ser estable. La estabilidad con respecto a la formación de jurisdicciones implica

$$v_1 + v_2 \geqslant 25/3 \quad \text{ó} \quad v_1 \geqslant 16/3 \quad \text{ó} \quad v_2 \geqslant 19/3. (2)$$

En efecto, si v no satisfaciera (2), entonces la jurisdicción formada por los consumidores 1 y 2 produciendo la variedad 2 podría obtener para todos sus miembros utilidades superiores a los que les corresponden en v. Así, supóngase que $v_1 + v_2 < 25/3$, $v_1 \leqslant 16/3$, $v_2 \leqslant 19/3$. Considérese la asignación $(\hat{x}, \hat{z})$ tal que $\hat{z}(1) = \hat{z}(2) = e^2$, $\hat{z}(3) = = e^0$, $\hat{x}(1) = v_1 - 2 + (1/2)((25/3) - v_1 - v_2)$, $\hat{x}(3) = 4$. El conjunto de consumidores I = 1, 2 , la variedad de bien público 2 y la asignación $(\hat{x}, \hat{z})$ satisfacen para la asignación que genera v las condiciones i), ii), y iii) en la definición (3). Por consiguiente, el vector de utilidad v no es estable con respecto a la formación de una jurisdicción por los consumidores 1 y 2.

Similarmente, la estabilidad con respecto a la formación de una jurisdicción por los consumidores 1 y 3 implica

$$v_1 + v_3 \geqslant 25/3 \quad \text{ó} \quad v_1 \geqslant 19/3 \quad \text{ó} \quad v_3 \geqslant 16/3, (3)$$

y la estabilidad con respecto a la formación de una jurisdicción por los consumidores 2 y 3 implica

$$v_1 + v_3 \geqslant 25/3 \quad \text{ó} \quad v_2 \geqslant 16/3 \quad \text{ó} \quad v_3 \geqslant 19/3. (4)$$

Un vector de utilidad factible y estable debe satisfacer simultáneamente las condiciones (1), (2), (3) y (4). Se comprueba fácilmente que este vector no existe. Cualquier vector de utilidad factible puede ser mejorado por una jurisdicción formada por dos consumidores.

Ejemplo 3:

Sea $M = \{1, 2, 3\}$, $L = \{1, 2, 3\}$, $b^1 = (6, 4, 1)$, $b^2 = (1, 6, 4)$, $b^3 = (4, 1, 6)$, $w(i) = 4$, $i \in M$, y

$$C_j(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 7 & \text{si } n > 0, \quad j \in L. \end{cases}$$

Por razonamientos análogos a los del ejemplo anterior se comprueba que todo vector de utilidad factible debe satisfacer

$$v_1 + v_2 + v_3 \leqslant 16, \tag{5}$$

y que la estabilidad con respecto a la formación de jurisdicciones de dos consumidores implica

$$v_1 + v_2 \geqslant 11 \quad \text{ó} \quad v_1 \geqslant 5 \quad \text{ó} \quad v_2 \geqslant 6 \tag{6}$$

$$v_1 + v_3 \geqslant 11 \quad \text{ó} \quad v_1 \geqslant 6 \quad \text{ó} \quad v_3 \geqslant 5 \tag{7}$$

$$v_2 + v_3 \geqslant 11 \quad \text{ó} \quad v_2 \geqslant 5 \quad \text{ó} \quad v_3 \geqslant 6 \tag{8}$$

Puesto que el sistema compuesto por (5), (6), (7) y (8) no tiene solución, no existe un vector de utilidad factible y estable.

Ejemplo 4:

Sea $M = \{1, 2, 3\}$, $L = \{1, 2, 3\}$, $b^1 = (6, 4, 1)$, $b^2 = (1, 6, 4)$, $b^3 = (1, 4, 6)$, $w(i) = 4$, $i \in M$ y

$$C_j(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 7 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

En este caso, el conjunto de vectores de utilidad factibles y estables son todos los que satisfacen las condiciones

$$v_1 + v_2 + v_3 = 19$$

$$4 \leqslant v_i \leqslant 8 \qquad i = 1, 3$$

$$6 \leqslant v_2 \leqslant 10$$

Cualquiera de estos vectores puede alcanzarse con la jurisdicción formada por todos los consumidores, produciendo la variedad 2 y distribuyéndose los costes de tal manera que la contribución de cada consumidor sea no negativa y no exceda al mínimo de sus recursos de bien privado y su relación de substitución entre el bien privado y la variedad 2 de bien público.

4. La existencia de asignaciones factibles y estables con dos variedades de bien publico

En los ejemplos de la sección anterior se relacionaba la inexistencia de asignaciones factibles y estables con la imposibilidad de seleccionar una variedad de bien público que no fuera despreferida[2] por una mayoría de consumidores a ninguna otra variedad. Claramente, tal variedad siempre existe si el número de variedades del bien público no es mayor que dos. El siguiente teorema establece la existencia de asignaciones factibles y estables para el modelo en el caso de dos variedades de bien público y de costes de producción independientes del número de suministrados.

Teorema

Si $L = \{1, 2\}$, $C_j(n) = F$ si $n > 0$, $C_j(0) = 0$, $j = 1, 2$, entonces existe una asignación factible y estable.

La siguiente proposición caracteriza las soluciones factibles y estables cuando las dos variedades se producen en cantidades positivas.

2. Con preferencias aditivas, las variedades de bien público pueden ser ordenadas según las preferencias con respecto a vectores de consumo que contienen distintas variedades y la misma cantidad de bien privado.

Proposición

Bajo las condiciones del Teorema, si (x, z) es una asignación factible y estable, y $\sum_{i \in M} z_j(i) > 0,\ j \in L$, entonces

(i) $z(i) = (1, 0)$ implica $b_1^i - b_2^i \geqslant w(i) - x(i) \geqslant 0$

(ii) $z(i) = (0, 1)$ implica $b_2^i - b_1^i \geqslant w(i) - x(i) \geqslant 0.$

Demostración del Teorema

El método de demostración consiste en la construcción de una asignación factible y estable.

Sean $\mathbf{M}_1 = \{ i \in \mathbf{M} : b_1^i \geqslant b_2^i \}$, $\mathbf{M}_2 = \{ i \in \mathbf{M} : b_1^i < b_2^i \}$, $t^i =$ $= \operatorname{Min}\{ w(i), | b_1^i - b_2^i | \}$, $T_1 = \sum_{M_1} t^i$, $T_2 = \sum_{M_2} t^i$.

Consideraremos distintas posibilidades, que trataremos por separado.

Caso 1: $T_1 \geqslant F,\ T_2 \geqslant F$

Defínase

$$\bar{t}^i = \begin{cases} t^i - (1/m_1)(T_1 - F) & \text{si } i \in \mathbf{M}_i \\ t^i - (1/m_2)(T_2 - F) & \text{si } i \in \mathbf{M}_2 \end{cases}$$

donde m_1 y m_2 son el número de elementos de $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ respectivamente.

Entonces la asignación (x, z) tal que $x(i) = w(i) - \bar{t}^i$, $z(i) = e^1$ si $i \in \mathbf{M}_1$, $z(i) = e^2$ si $i \in \mathbf{M}_2$, es una asignación factible y estable. En efecto, se comprueba fácilmente que $\sum_M w(i) - \bar{t}^i \leqslant \sum_M w(i) - 2F$, y que $u^i(w(i) - \bar{t}^i, e^1) \geqslant w(i)$ si $i \in \mathbf{M}_1$ y $u^i(w(i) - \bar{t}^i, e^2) \geqslant w(i)$ si $i \in \mathbf{M}_2$. Falta comprobar que (x, z) es estable con respecto a la formación de coaliciones. Supóngase que existe un conjunto de consumidores

$I \leqslant M$, una variedad de bien público j y una asignación (x', z') tales que

$$\text{(i)}\quad z'(i) = e^j, \qquad i \in I$$

$$\text{(ii)}\quad \sum_{i \in I} x'(i) \leqslant \sum_{i \in I} w(i) - F$$

$$\text{(iii)}\quad u^i(x'(i), z'(i)) > u^i(x(i), z(i)), \qquad i \in I.$$

La condición (iii) implica $x'(i) > x(i)$ para $i \in I \cap M_j$, $x'(i) > w(i)$ para $i \in I | M_j$. Pero entonces $\Sigma_I w(i) - x'(i) < \Sigma_{I \cap M_1} w(i) - x(i) \leqslant F$, lo que contradice la condición (ii). Por lo tanto, la asignación (x, z) es estable con respecto a la formación de jurisdicciones.

Caso 2: $T_1 \geqslant F$, $T_2 < F$.

Defínase

$$\hat{t}^i = \begin{cases} t^i - (1/m_1)(T_1 - F) & \text{si} \quad i \in M_1 \\ 0 & \text{si} \quad i \in M_2. \end{cases}$$

La asignación (x, z) tal que $(x, z)(i) = (w(i) - \hat{t}^i, e^1)$ es factible y estable. En efecto, se comprueba fácilmente que (x, z) es factible y estable con respecto a la participación individual. Asimismo, por un razonamiento análogo al del caso 1), (x, z) es estable con respecto a la formacióndde jurisdicciones que produzcan la variedad 1 de bien público. Falta demostrar que (x, z) es estable con respecto a la formación de jurisdicciones que produzcan la variedad 2. Supóngase que existen $I' \in M$, (x", z") tales que

$$\text{(i)}\quad z''(i) = e^2, \qquad i \in I'$$

$$\text{(ii)}\quad \sum_{I'} x''(i) \leqslant \sum_{I'} w(i) - F$$

$$\text{(iii)}\quad u^i(x''(i), e^2) > u^i((x, z)(i)), \qquad i \in I.$$

La condición (iii) implica $x''(i) > w(i)$ para $i \in I \cap M_1$, $x''(i) > w(i) - \bar{t}^i$ para $i \in I \cap M_2$. Pero entonces $\Sigma_I w(i) - x''(i) < \Sigma_{I \cap M_2} \bar{t}^i < F$, lo que contradice la condición (ii).

Caso 3: $T_1 < F$, $T_2 < F$.

Defínase $t_j^i = \text{Min}\ \{w(i), b_j^i\}$, $i \in M$, $j \in L$, $T'_1 = \Sigma_M t_1^i$, $T'_2 = \Sigma_M t_2^i$. Si $T_1 < F$, $T_2 < F$, entonces la asignación (x, z) definida por $(x, z)(i) = (w(1), e^0)$ es factible y estable. Si $T_1 \geqslant F$, $T_2 < F$, entonces la asignación (x, z) definida por $(x, z)(i) = (w(i) - t_1^i + (1/m)(T_1 - F), e^1)$ es factible y estable. Se considera a continuación el caso en el que $T_1 \geqslant F$, $T_2 \geqslant F$. Sea $M_{11} = \{i \in M_1 : b_1^i - b_2^i \geqslant w(i)\}$, $M_{12} = \{i \in M_1 : w(i) > b_1^i - b_2^i\}$, $M_{21} = \{i \in M_2 : b_2^i - b_1^i \geqslant w(1)\}$, $M_{22} = \{i \in M_2 : w(i) > b_2^i - b_1^i\}$. Existen $\hat{t}_1^i$, $\hat{t}_2^i$, $i \in M$, tales que $\hat{t}_1^i = w(i)$ para $i \in M_{11}$, $\text{Max}\ \{0, b_1^i - b_2^i\} \leqslant \hat{t}_1^i \leqslant t_1^i$ para $i \in M_{12} \cup M_2$, $\hat{t}_2^i = w(i)$ para $i \in M_{21}$, $\text{Max}\ \{0, b_2^i - b_1^i\} \leqslant \hat{t}_2^i \leqslant t_2^i$ para $i \in M_1 \cup M_{22}$, $\Sigma_M\ \hat{t}_1^i = F_1$, $\Sigma_M\ \hat{t}_2^i = F_2$. Sea $\hat{t}_{12}^i$, $i \in M_{12} \cup M_2$, tal que $u^i(w(i) - \hat{t}_{12}^i, e^2) = u^i(w(i) - \hat{t}_1^i, e^1)$, y sea $\hat{t}_{21}^i$, $i \in M_1 \cup M_{22}$, tal que $u^i(w(i) - \hat{t}_{21}^i, e^1) = u^i(w(i) - \hat{t}_2^i, e^2)$. Se comprueba fácilmente que $\hat{t}_{12}^i - \hat{t}_1^i \leqslant w(i)$ si $i \in M_{21}$, $\hat{t}_{12}^i - \hat{t}_1^i \leqslant \hat{t}_2^i - \hat{t}_{2i}^i$, si $i \in M_{22}$ $\hat{t}_{21}^i - \hat{t}_2^i \leqslant w(i)$ si $i \in M_{11}$, $\hat{t}_{21}^i - \hat{t}_2^i \leqslant \hat{t}_1^i - \hat{t}_{12}^i$ si $i \in M_{12}$. Por lo tanto, o bien $\Sigma_{M_2}(\hat{t}_{12}^i - \hat{t}_1^i) - \Sigma_{M_{11}} w(i) - \Sigma_{M_{12}}(\hat{t}_1^i - \hat{t}_{12}^i) \leqslant 0$, o bien $\Sigma_{M_1}(\hat{t}_{21}^i - \hat{t}_2^i) - \Sigma_{M_{21}} w(i) - \Sigma_{M_{21}}(\hat{t}_2^i - \hat{t}_{21}^i) \leqslant 0$, o ambos. Supongamos que $\Sigma_{M_2}(\hat{t}_{12}^i - \hat{t}_1^i) - \Sigma_{M_{11}} w(i) - \Sigma_{M_{12}}(\hat{t}_1^i - \hat{t}_{12}^i) \leqslant 0$. Entonces la asignación (x, z) tal que $(x, z)(i) = (w(i) - t_1^i, e^1)$, $i \in M$, es una asignación factible y estable. En efecto es fácil de ver que (x, z) es factible, estable individualmente, y estable con respecto a la formación de jurisdicciones que produzcan la variedad 1. Falta demostrar que (x, z) es estable con respecto a la formación de jurisdicciones que produzcan la variedad 2. Supongamos lo contrario. Entonces existe una asignación $(\hat{x}, \hat{z})$ y un subconjunto de consumidores I que, para $J = 2$, satisfacen las condiciones (i), (ii) y (iii) en la definición de estabilidad con respecto a la formación de jurisdicciones. La condición (ii) implica $\Sigma_I w(i) - \hat{x}(i) \geqslant F$.

La condición (iii) implica $\hat{x}(i) > w(i)$ para $i \in I \cap M_{11}$, $w(i) - \hat{x}(i) < \hat{t}^i_{12}$ para $i \in I \cap (M_{12} \cup M_2)$. Además, $\hat{t}^i_{12} \geqslant 0$ para todo $i \in M_{12} \cup M_2$. Por lo tanto, $F \leqslant \Sigma_I w(i) - \hat{x}(i) < \Sigma_{M_{12} \setminus M_2} \hat{t}^i_{12} = F + \Sigma_{M_2} (\hat{t}^i_{12} - \hat{t}^i_1) - \Sigma_{M_{11}} w(i) - \Sigma_{M_{12}} (\hat{t}^i_1 - \hat{t}^i_{12}) \leqslant F$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, (x, z) es factible y estable.

Q.E.D.

La demostración de la Proposición está contenida en el argumento anterior.

REFERENCIAS

1. B. ELLICKSON: "A generalization of the pure theory of public goods", *Amer. Econ. Rev.* 63 (1973), 417-432.

2. B. ELLICKSON: "Local public goods", *J. Econ. Theory* 21 (1979), 46-61.

3. D. FOLEY: "Lindahl's solution and the core of an economy with public goods", *Econometrica* 38 (1970), 66-72.